UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS - GRADO 9°

TEMA: NÚMEROS REALES Y FUNCIÓN LINEAL

OBJETIVO GENERAL:

- Comprender los números reales como un conjunto que engloba a otros sistemas numéricos, identificando cada uno de ellos de acuerdo a sus características.
- Identificar las características de la Función Lineal**.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Definir el conjunto de los números reales como un conjunto que engloba otros conjuntos numéricos vistos con anterioridad.
- Explicar las características que diferencian a los números reales de otros conjuntos numéricos.
- Reconocer la estructura de los números reales mediante la interpretación de gráficos.
- Utilizar criterios para clasificar un conjunto de números en los diversos conjuntos numéricos.
- Determinar la ecuación de una función lineal a partir de sus elementos.
- Modelar como una función lineal situaciones de la vida real que permitan su uso con el fin de realizar estimaciones.

REQUISITOS PREVIOS:

- Desarrollar las operaciones básicas correctamente.
- Ubicar números en la recta numérica.
- Ubicar puntos en el plano de coordenadas.
- Reconocer la notación de ciertas figuras geométricas como puntos, rectas y planos

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
1. **Números Reales. Definición. Recta real.** 2. **Operaciones con Números Reales.**	• Participa del trabajo individual y en familia de una manera comprometida y responsable. • Utiliza las herramientas tecnológicas como fuente	• Demuestra interés por aprender. • Desarrolla y practica las actividades propuestas en la unidad didáctica. • Propone estrategias para la construcción y

3. Función lineal. • Gráfica. • Ecuación de la recta. • Pendiente. • Líneas paralelas y perpendiculares. **4. Sistemas de ecuaciones lineales 2x2.** **5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos:** • Gráfico.	de información, para complementar los conocimientos. • Resuelve situaciones problema aplicando los conceptos vistos. • Consigna los contenidos de la unidad didáctica de manera coherente y cohesiva. • Plantea estrategias para mejorar los procesos fundamentales. • Desarrolla las actividades propuestas en la unidad didáctica y supera sus insuficiencias cognitivas. • Leer cuidadosamente la unidad didáctica.	apropiación del conocimiento. • Presenta sus trabajos en forma oportuna y responsable. • Asume una actitud de confianza frente a las propias capacidades para la comprensión de la unidad didáctica.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS:

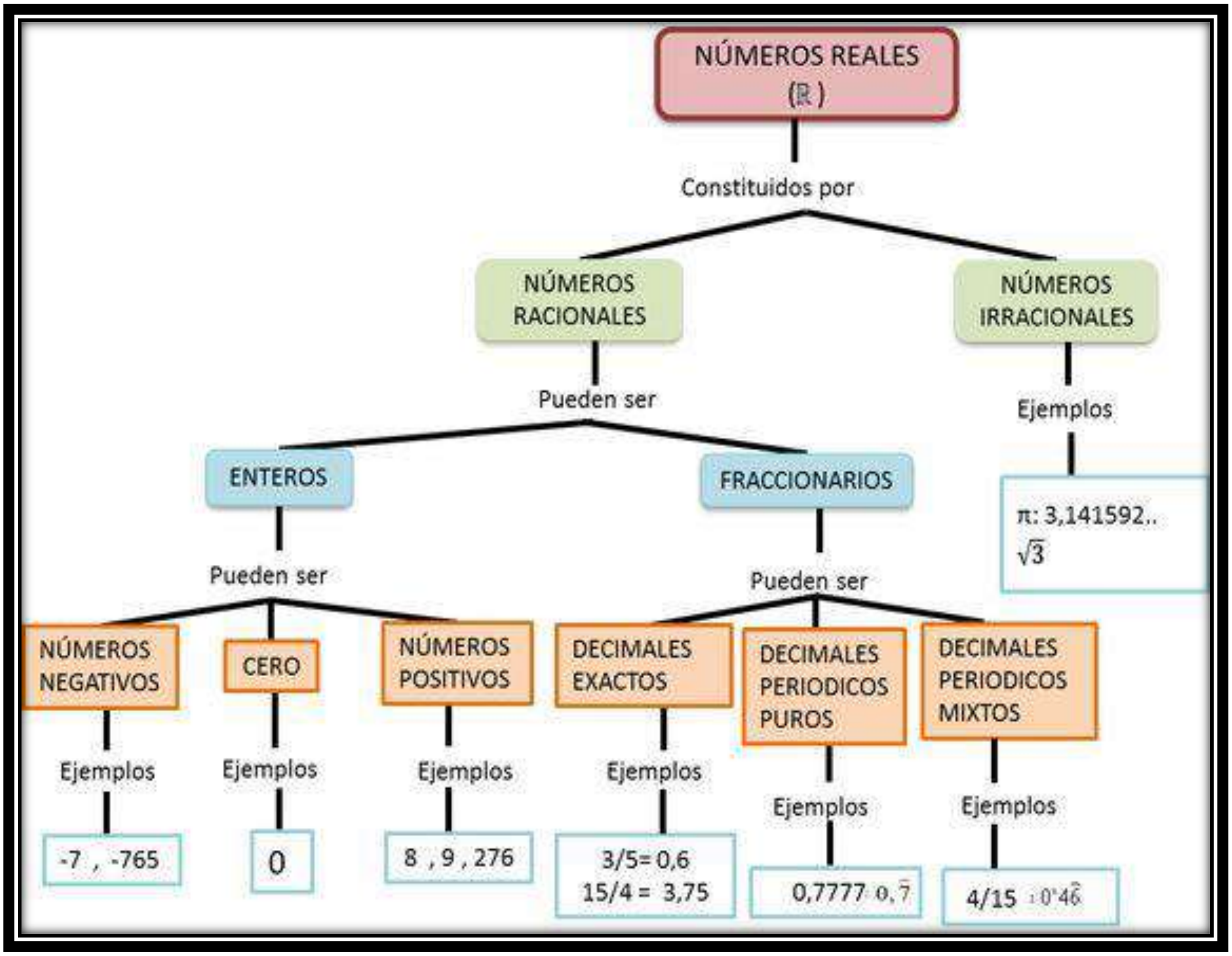
- Partir de los aprendizajes previos de los estudiantes.
- Posibilitar suficiente información para el aprendizaje significativo de los estudiantes.
- Presentar la respectiva conexión entre los aprendizajes previos y los conocimientos que se deberán adquirir.
- Proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los estudiantes, con el fin de que resulten motivadoras.
- Hacer uso de las TICS para retroalimentar, los conceptos de la unidad didáctica.
- Desarrollar el concepto por medio de videos y explicaciones paso a paso, luego, presentar ejercicios como actividad de apoyo y finalmente presentar unos talleres referentes a los contenidos presentados.

"Nunca consideres el estudio como una obligación sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"

ACTIVIDADES:

NÚMEROS REALES

Los NÚMEROS REALES son el resultado de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Se simboliza con la letra ℝ. En el siguiente mapa se observa la formación del conjunto de los números reales:



Definamos cada uno de los conjuntos anteriores:

- ✓ **NÚMEROS RACIONALES (Q):** El conjunto de los números racionales está formado por el **cociente** entre dos números. Estos se pueden expresar como números naturales, enteros, decimales exactos o números decimales periódicos.

  - ✓ **NÚMEROS NATURALES (N):** son aquellos que se usan para contar cosas y son en su orden:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}

- **NÚMEROS ENTEROS (Z):** son una extensión de los números naturales, los números enteros se usan en algunas situaciones de pérdida o ganancia de dinero, temperaturas bajo cero, alturas sobre el nivel del mar o profundidad. Y son en su orden:

Z = {…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}

Al observar el conjunto anterior vemos que el conjunto de los números enteros está formado por:

Los enteros positivos: Z^+ = {0, 1, 2, 3, 4, …}

Los enteros negativos: Z^- = {…, -4, -3, -2, -1}

El cero: {0}

- **NÚMEROS IRRACIONALES (Q*):** Está formado por todos los números decimales infinitos no periódicos.

Los números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, \pi$, … son algunos números irracionales cuya representación decimal tiene infinitas cifras no periódicas.

$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ $\sqrt[3]{9} = 2{,}080083\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ $\pi = 3{,}1415926\ldots$

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA DE LOS NÚMEROS REALES:

Para aprender a graficar los números reales en la recta numérica observemos los siguientes videos:

¿Cómo graficar fracciones? https://www.youtube.com/watch?v=3RGj3RbqkmQ

¿Cómo graficar decimales? https://www.youtube.com/watch?v=t5Bu_YUCrPk

ACTIVIDAD 1:

1. Completa la tabla con una X según corresponda:

	302	$-\sqrt{16}$	0,8472…	-1,288..	$\frac{12}{11}$	$\sqrt{8}$	$-\frac{99}{100}$	3,5	$\sqrt{-4}$
N									
Z									
Q									
Q*									
R									

2. Determina si la proposición es verdadera (V) o falsa (F). Si es falsa, da un ejemplo que es falsa.
   a. Algunos números enteros son racionales.
   b. Todo número irracional es un número real.
   c. Todo número natural es entero.
   d. No todos los números racionales son reales.
   e. Algunos números irracionales son decimales infinitos.
   f. Todo decimal finito es racional.
3. Grafica los siguientes números en la recta numérica: $\sqrt{4}$; -6; $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{3}$; 2,61; π; $-4,3$
4. En promedio, la densidad de la sangre de una persona sana es de 1,05588 g/ml y la de una persona alcohólica de 1,06133 g/ml. Compara estos valores y da una conclusión al respecto. ¿Qué consecuencias trae el alcohol a nuestro cuerpo?

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES:

✓ ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES

En la expresión $a + b = c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$, a y b son los **sumandos** y c es la **suma**.

En la expresión $a - b = d$, con a, b y $d \in \mathbb{R}$, a es el **minuendo**, b es el **sustraendo** y c es la **diferencia**. Esta operación es equivalente a la adición $a + (-b)$.

De forma general, para a, b y $c \in \mathbb{R}$ se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización
Clausurativa	$(a + b) \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a + b = b + a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Modulativa	Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$
Invertiva	Para todo número real a existe $-a$, tal que $a + (-a) = 0$

Ejemplo:

Un turista se encuentra en el punto A y se dirige hasta el punto B. Para ello, tiene que desplazarse por diferentes trayectos cuyas distancias son: $40\sqrt{5}$ m, 20 m, $5\sqrt{5}$ m, $60\sqrt{3}$ m, 12 m y $12\sqrt{3}$ m, respectivamente.

La distancia total que recorre el turista está dada por la adición. Observa:

$$40\sqrt{5} + 20 + 5\sqrt{5} + 60\sqrt{3} + 12 + 12\sqrt{3} =$$

$$\left(40\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right) + (20 + 12) + \left(60\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) =$$

$$45\sqrt{5} + 32 + 72\sqrt{3} \approx 257{,}33072$$

Aproximando por truncamiento a la décima, se obtiene: 257,3.

Entonces, el turista debe recorrer aproximadamente 257,3 m en total.

NOTA: Antes de continuar observa el siguiente video para que recuerdes ¿cómo se suman y restan las fracciones?
https://www.youtube.com/watch?v=TbpR9zShGU0

✓ MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES:

En la expresión $a \cdot b = p$, con a, b y $p \in \mathbb{R}$, a y b son los **factores** y p es el **producto**. Se utilizan expresiones alternas para indicar el producto; estas son:

$$a \cdot b = a \times b = (a)(b) = ab$$

En la expresión $a \div b = c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$, a es el **dividendo**, b es el **divisor** y c es el **cociente**.

De forma general, para a, b y $c \in \mathbb{R}$ se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización
Clausurativa	$(a \cdot b) \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Modulativa	Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
Invertiva	Para todo real a existe a^{-1}, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

OBSERVA: en los siguientes videos podrás recordar ¿cómo se multiplican y dividen las fracciones y las raíces?:

https://www.youtube.com/watch?v=ygxurdxhfgi

https://www.youtube.com/watch?v=dl3itenngoy

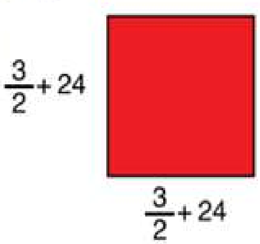
ACTIVIDAD 2:

Realiza las siguientes operaciones:

1. 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=
2. 2 + 2.5 + 2.55 + 2.555 =
3. $\frac{5}{5} + \frac{3}{5} - \frac{7}{10} =$
4. $5 + 3 (14 \div 2) - 10 \div 5 =$
5. Decir si cada afirmación es verdadera o falsa:
   a) Todo número natural es también un número real
   b) Todo número racional es también un número entero
   c) Todo número entero puede escribirse como un número racional
   d) Todo número irracional es también un número real
   e) Todo número decimal infinito es un número irracional

Encuentra el área y perímetro de la siguiente figura geométrica:

6.

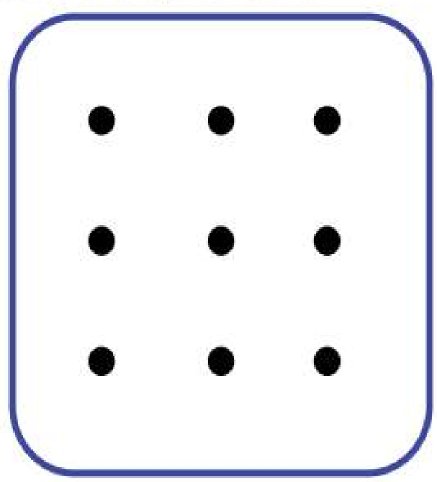


8. Completa el siguiente cuadro realizando las operaciones indicadas:

a	b	$a + b$	$(2a - b)$	$a * b$
1	-2			
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$			
0	$\frac{5}{2}$			
$\frac{6}{5}$	1			
$\sqrt{6}$	$-\sqrt{8}$			
3.5	4.203			
$5.\overline{16}$	$-11\overline{6}$			

Diversión matemática

Puedes unir los nueve puntos con cuatro líneas rectas y sin pasar dos veces por el mismo punto? Inténtalo.



✓ POTENCIACIÓN CON EXPONENTE ENTERO:

Todo número real a elevado a un **exponente entero** negativo n, cumple que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para simplificar expresiones donde estén presentes potencias con exponentes enteros, se utilizan las propiedades definidas en la Tabla 1.9. Las bases a y b son números reales y los exponentes m y n son números enteros.

	Propiedad	Ejemplo
1	$a^m a^n = a^{m+n}$	$(-3)^2(-3)^5 = (-3)^7$
2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^{-5}}{2^4} = 2^{-5-4} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9}$
3	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^5)^7 = 4^{5 \cdot 7} = 4^{35}$
4	$(ab)^n = a^n b^n$	$(-6 \cdot 8)^2 = (-6)^2 \cdot 8^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{7}\right)^6 = \frac{3^6}{7^6}$
6	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
7	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{4^{-2}}{3^{-9}} = \frac{3^9}{4^2}$

Tabla 1.9

Ejemplo:

Un científico creó una fórmula general para modelar una situación real. La expresión que escribió es $(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$.

Para simplificar la expresión se utilizan las propiedades definidas en la Tabla 1.9.

$$(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2} = (3ab^2c)\left(\frac{c^3}{2a^2b}\right)^2 = (3ab^2c)\frac{(c^3)^2}{(2a^2b)^2} = \frac{3ab^2cc^6}{4a^4b^2} = \frac{3c^7}{4a^3}$$

ACTIVIDAD 3:

1. Calcula las siguientes potencias.

a. $(-3,5)^3$

b. $-4^4 \cdot -2^5$

c. $\frac{3^{-2}}{9}$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

e. $((-4)^2)^{-3}$

f. $8^0 \cdot -\left(\frac{4}{3}\right)^2$

g. $(99^0 - 23,4)^2$

h. 0^0

i. $10^2 \cdot 10^3$

j. $\frac{-3^0}{(-3)^2}$

2. Simplifica cada una de las siguientes expresiones y elimina los exponentes negativos.

a. a^8a^{-4}

b. $b^4\left(\frac{1}{3}b^2\right)(12b^{-8})$

c. $\frac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$

d. $(16x^2y^4)\left(\frac{1}{4}x^5y\right)$

e. $\frac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$

f. $\left(\frac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\frac{d^2}{c^3}\right)^3$

3. Completa la Tabla .

Base	Exponente	Potencia
$-\frac{5}{3}$	3	$-\frac{125}{27}$
	-2	$\frac{1}{25}$
-101	0	

4. En un criadero los conejos se cuadruplican cada dos meses, de tal forma que en los dos primeros meses hay cuatro conejos.
Completa la siguiente tabla:

Meses	2	4	6	8	10	12	14
Conejos	4	16	?	?			

a)¿Cuántos conejos habrá al cabo de un año?
b)¿Cuántos conejos habrá al cabo de un año y medio?
c)¿En cuántos meses los conejos serán de 262,144?
d)¿En cuántos meses los conejos serán más de 1,000,000?

- ✓ **RADICACIÓN:**

Cuando Andrés digita $\sqrt[4]{-8}$ en la calculadora, el aviso "*Math Error*" que aparece en la pantalla, significa que hay un error matemático o que el resultado no está definido en los números reales.

En este caso, se deduce que la raíz cuarta de -8 no existe porque no hay un número real que multiplicado cuatro veces por sí mismo dé como resultado -8. Por lo tanto, $\sqrt[4]{-8}$ no está definida en los números reales.

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la **raíz n-ésima** de un número real a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad \text{significa que} \quad b^n = a.$$

Si n es par, se debe tener que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

El número de raíces reales que tiene un número real depende del signo del radicando y de si el índice es par o impar. Ten en cuenta la información de la Tabla

Índice	Radicando	Número de raíces reales	Ejemplos
Impar	Cualquier número real	Una de igual signo que el radicando	$\sqrt[7]{128} = 2$, porque $2^7 = 128$ $\sqrt[5]{-3125} = -5$, porque $(-5)^5 = -3\,125$ $\sqrt[3]{0} = 0$, porque $0^3 = 0$
Par	Positivo	Dos raíces	$\sqrt[4]{2041} = \pm\ 7$, porque $7^4 = 2\,041$ o $(-7)^4 = 2\,041$
	Nulo	Una raíz nula	$\sqrt[8]{0} = 0$, porque $0^8 = 0$
	Negativo	No existen raíces reales	$\sqrt[4]{-8} \notin \mathbb{R}$, porque no existe un número real que elevado a la 4 dé -8.

Ejemplo:

Para resolver la expresión $\dfrac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt[100]{1}}{\sqrt[8]{256}}$ se calculan las raíces y luego se realizan las operaciones indicadas, así: $\dfrac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt[100]{1}}{\sqrt[8]{256}} = \dfrac{-3+1}{\pm 2}$.

Como en el denominador hay dos resultados posibles, entonces la expresión tiene dos soluciones: $\dfrac{-3+1}{2} = -1$ y $\dfrac{-3+1}{-2} = 1$.

- ✓ **Potenciación con exponentes fraccionarios:**

Toda **potencia con exponente fraccionario** puede escribirse como un radical. Si $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$(a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

Identifica los valores de las incógnitas x, w y k, en las siguientes expresiones:

$81^{\frac{1}{4}} = x$, $(-343)^{\frac{1}{w}} = -7$ y $k^{\frac{1}{5}} = -5$.

Se representan estas potencias como expresiones radicales, así:

$$81^{\frac{1}{4}} = x \Rightarrow \sqrt[4]{81} = x$$

$$(-343)^{\frac{1}{w}} = -7 \Rightarrow \sqrt[w]{-343} = -7$$

$$k^{\frac{1}{5}} = -5 \Rightarrow \sqrt[5]{k} = -5$$

De esta manera, se identifica el valor de las incógnitas. Luego:

$$\sqrt[4]{81} = x \Rightarrow x = 3$$

$$\sqrt[w]{-343} = -7 \Rightarrow w = 3$$

$$\sqrt[5]{k} = -5 \Rightarrow k = -3\,125$$

- ✓ **RACIONALIZACIÓN:**

La **racionalización** es un proceso en el que se elimina la parte radical en el denominador de una expresión.

Ejemplo:

Para racionalizar la expresión $\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}}$ cuyo **índice del radical** es 3, se amplifica la fracción por un factor que elimine el radical en el denominador. Es decir, se busca un **factor racionalizante** que multiplicado por $\sqrt[3]{9h}$ dé como resultado $3h$. En este caso el factor es $\sqrt[3]{3h^2}$ porque $\sqrt[3]{3^2h} \cdot \sqrt[3]{3h^2} = 3h$. Al racionalizar la expresión se obtiene:

$$\frac{3h}{\sqrt[3]{3^2h}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3h^2}}{\sqrt[3]{3h^2}} = \frac{3h \cdot \sqrt[3]{3h^2}}{3h} = \sqrt[3]{3h^2}$$

Ejemplo:

Para racionalizar la expresión $\frac{3x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$, donde el denominador es un binomio, la fracción se amplifica por el conjugado del denominador, es decir, por el binomio con signo opuesto en el segundo término: $\sqrt{x}-\sqrt{2}$. La racionalización se hace así:

$$\frac{3x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{3x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x-2}$$

Actividad 4:

1. Simplifica cada expresión.

   a. $\sqrt[5]{-32}+(-1)^{\frac{2}{3}}$

   b. $\frac{\sqrt{100}-\sqrt[4]{16}}{\sqrt[18]{0}}$

   c. $\frac{-4^{\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{-243}}{\sqrt{121}}$

   d. $-64^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{100}$

2. Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d, está dado por la expresión $t=\frac{1}{4}d^{\frac{1}{2}}$, donde t se mide en segundos y d se mide en pies. Halla el tiempo que tardará un objeto en caer 100 pies.

3. La relación entre el radio r de una esfera y su área total A es $r=\left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total de 64π unidades cuadradas?

4. Racionaliza

   a. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

   b. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

   c. $\frac{1}{\sqrt[7]{3^2}}$

   d. $\frac{2}{3\sqrt{7}}$

   e. $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

   f. $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$

5. Completa la Tabla 1.13. Luego, responde.

n	$2^{\frac{1}{n}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$
1		
2		
5		
10		
100		

Tabla 1.13

   a. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de 2 cuando n se incrementa?

   b. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de $\frac{1}{2}$ cuando n se incrementa?

6. En una canasta se empacan tres huevos, en la siguiente canasta se empacan el triple de los que había en la canasta anterior y así sucesivamente.

   a) ¿Cuántos huevos tiene la cuarta canasta?
   b) ¿Cuántos huevos tiene la sexta canasta?
   c) ¿En qué canasta habrá 6,561 huevos?

FUNCIÓN LINEAL:

Una **función lineal** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $f(x) = mx$, siendo m un número real diferente de 0.

Algunas características de la función lineal $f(x) = mx$ son las siguientes:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen.
- El valor de m se llama **constante de proporcionalidad**. Si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.
- Es una función **continua**.

Ejemplo:

El ICE (*Inter city Express*) es un tren que conecta todas las ciudades principales de Alemania. Alcanza una velocidad media de 270 km/h. En la Tabla 5.4 se muestra la distancia D que recorre en función del tiempo t.

t (Tiempo en horas)	1	2	3	4	5	...
$D(t)$ (Distancia recorrida en km)	270	540	810	1080	1350	...

Tabla 5.4

Esta situación puede modelarse por medio de la función $D(t) = 270t$, cuya gráfica es una línea recta que pasa por (0, 0), como se observa en la Figura 5.13. En este caso, la constante de proporcionalidad es 270.

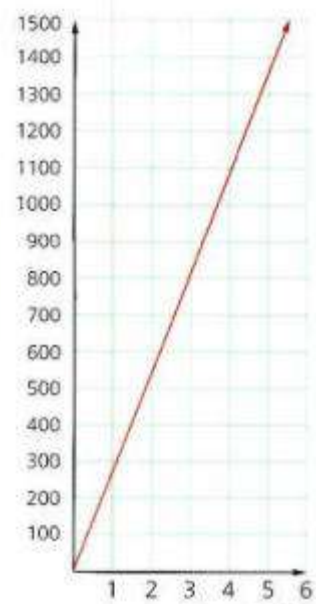


Figura 5.13

✓ FUNCIÓN AFÍN:

Una **función afín** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $f(x) = mx + b$, siendo m y b números reales distintos de 0.

Las principales características de la función afín $f(x) = mx + b$ son:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el punto $(0, b)$. Este se denomina **punto de corte** con el eje de ordenadas.

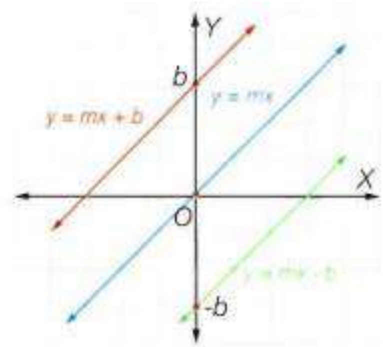
- El número ***m*** se llama **constante de proporcionalidad**. Si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.
- Es una función **continua**.

GRAFICA:

La **gráfica de la función afín** $f(x) = mx + b$ se obtiene al desplazar verticalmente la gráfica de la función $f(x) = mx$.

En la Figura 5.14 se observa que:

- Si $b > 0$, el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $b < 0$, el desplazamiento es hacia abajo.



Observa los siguientes videos para que aprendas:

¿Cómo graficar una recta a partir de una tabla de valores?
https://www.youtube.com/watch?v=AoZpzAoC1Qg
¿Cómo graficar una recta a partir de la pendiente?
https://youtu.be/GBSmycLgTeU

ACTIVIDAD 5:

1. Realiza una tabla de valores para cada función y grafica.
   a. $2x + 5 = y$
   b. $-5x - 3 = y$
   c. $x + 6 = y$
   d. $3y = 9x - 12$
2. Utiliza la pendiente y el punto de intersección para graficar las siguientes funciones:
   a. $\frac{5}{2}x - 4 = y$

b. $-\frac{3}{4}x + 2 = y$

c. $x = 2y$

3. Leo y respondo:

Las tablas de crecimiento son cuadros de medidas que permiten valorar y comparar el crecimiento de niños, jóvenes y adultos en relación con un grupo estándar. Las tablas de crecimiento aceptadas a nivel nacional se basan en datos de mediciones recopilados por el Centro Nacional de Estadísticas en Salud. Los parámetros que se miden, principalmente en ellas son la estatura y el peso.

En los niños y jóvenes deportistas es especialmente importante hacer un seguimiento permanente de los cambios de peso y estatura. Esto se realiza mediante la elaboración de las curvas de crecimiento y aumento de peso, elaboradas por los médicos y nutricionistas, las cuales se basan en las tablas y gráficas de crecimiento del Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF). Analicemos la tabla siguiente:

Velocidad de crecimiento al año

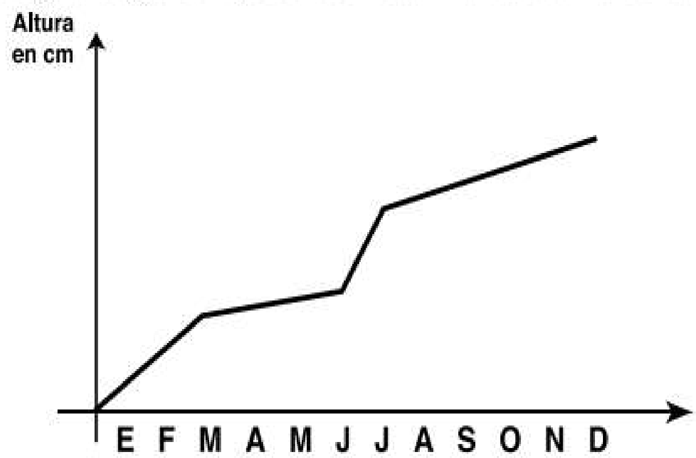
Edad (años)	Estatura (cm)	Peso (kg)
10-11	6	4
11-12	6.5	5
12-13	6.5	5
13-14	7	5
14-15	6	6.5
15-16	4	5.5
16-17	3	4
17-18	1.5	3

1. Qué sucede con el peso de un adolescente a medida que aumenta su edad?
2. Qué sucede con la estatura de un adolescente a medida que aumenta su edad?
3. Identifica la variable independiente y la variable dependiente de la tabla anterior.
4. Entre qué edades se espera que un adolescente crezca más rápido?

✓ PENDIENTE DE UNA RECTA:

EJERCICIO:

La siguiente grafica representa el crecimiento de un árbol durante un año.



En la gráfica observamos que cada pedazo tiene su propia inclinación.

Ahora contesta:

¿En cuáles meses se produjo el mayor crecimiento del árbol?

¿Fue uniforme el crecimiento del árbol?

¿En cuáles meses se produjo el menor crecimiento del árbol?

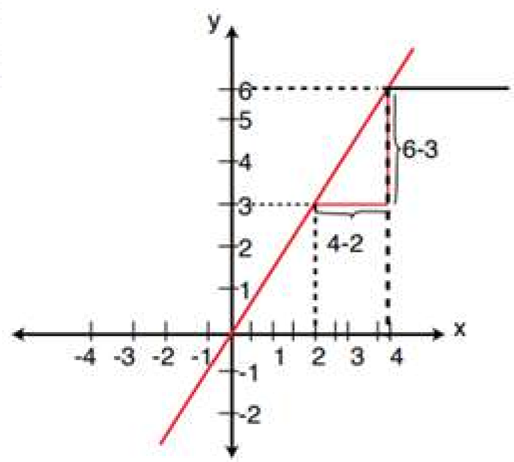
EXPLICACIÓN:

Para ver qué tan inclinada está una recta, es decir, "qué tan pendiente" está una recta, procedemos así:

Tomamos dos puntos de ella, por ejemplo los puntos P(2,3) y Q(4,6). En el triángulo rectángulo que se forma, establecemos la razón entre sus catetos opuesto y adyacente al ángulo P y la llamamos m.

Esto es:

$$m=\frac{6-3}{4-2}=\frac{3}{2}=1.5$$



En general, si llamamos (x_1,y_1) a P y (x_2,y_2) a Q,

Esto es: $(x_1,y_1) = P$ y $(x_2,y_2) = Q$,

expresaremos la pendiente $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

✓ ¿PARA QUÉ ME SIRVE LA PENDIENTE?

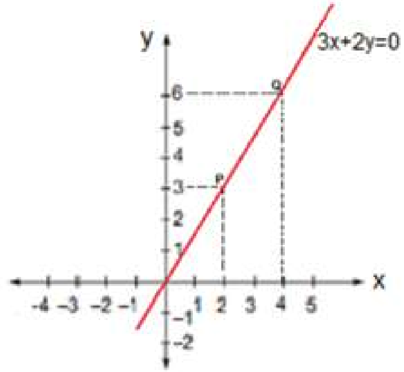
La pendiente m sirve para determinar la ecuación de la recta.

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,3) y Q(4,6)?

Hemos dicho que: $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, de donde podemos

decir que $m(x_2-x_1) = (y_2-y_1)$

Sabemos que $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{6-3}{4-2} = \dfrac{3}{2}$



Reemplazado un punto de la recta, por ejemplo P(2,3) y

$m = \frac{3}{2}$ en $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tenemos: $\frac{3}{2} = \frac{y_2 - 3}{x_2 - 2}$.

Por la ley fundamental de las proporciones nos queda:

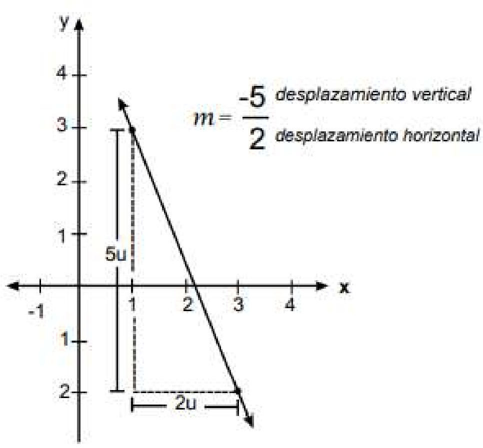
$$3(x_2 - 2) = 2(y_2 - 3)$$
$$3x_2 - 6) = 2y_2 - 6)$$
$$3x_2 - 2y_2 = -6+6$$
$$3x_2 - 2y_2 = 0$$

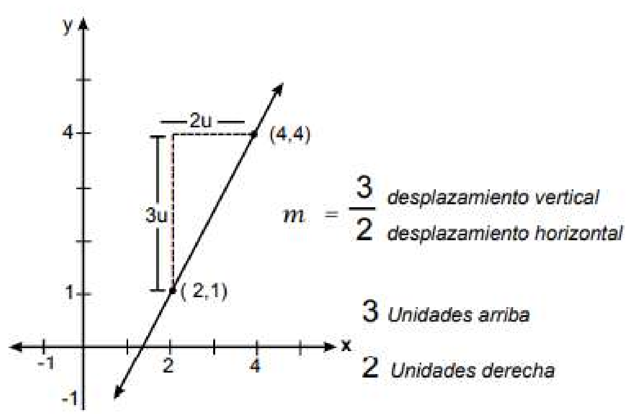
Que podemos escribir como: $3x_2 - 2y_2 = 0$

La ecuación de la recta dados: su pendiente m y un puntos (x1 –y1) es y – y1 = m(x –x1) y se conoce con el nombre de ecuación de la forma punto pendiente.
En general, la ecuación de la recta que pasa por el punto (x, y) y tiene pendiente m es: y = mx + b en donde m = es la pendiente y b= es el punto de intersección de la recta con el eje Y

Sobre el plano cartesiano, la pendiente muestra el desplazamiento tanto vertical como horizontal

Para representar las rectas, primero se ubica el punto dado y a partir de allí, se realizan los desplazamientos horizontal y vertical que indique la pendiente, así:





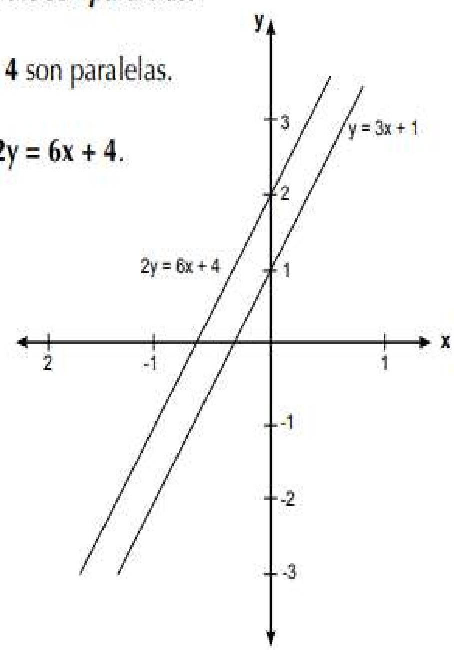
✓ POSICIONES DE DOS RECTAS EN EL PLANO

1. **Paralelas:** ***Si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.***

Analicemos si las dos rectas: **$y = 3x + 1$** y **$2y = 6x + 4$** son paralelas.
La pendiente de la recta **$y = 3x + 1$** es **$m_1 = 3$**
Ahora, veamos cómo es la pendiente de la ecuación **$2y = 6x + 4$**.
Despejando la incógnita y tenemos:

$$y = \frac{6x+4}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{4}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{4}{2} = 3x+2$$

Como **$2y = 6x + 4$** es equivalente a **$y= 3x+2$**
y su pendiente es **$m_2 = 3$**, concluimos son paralelas.



Perpendiculares: ***Si la pendiente de una es el recíproco negativo de la otra, lo cual significa que dos rectas son perpendiculares si su producto es -1.***

Analicemos si las dos rectas: **$3y + 2x = -1$** y **$2y - 3x = -1$** son perpendiculares.

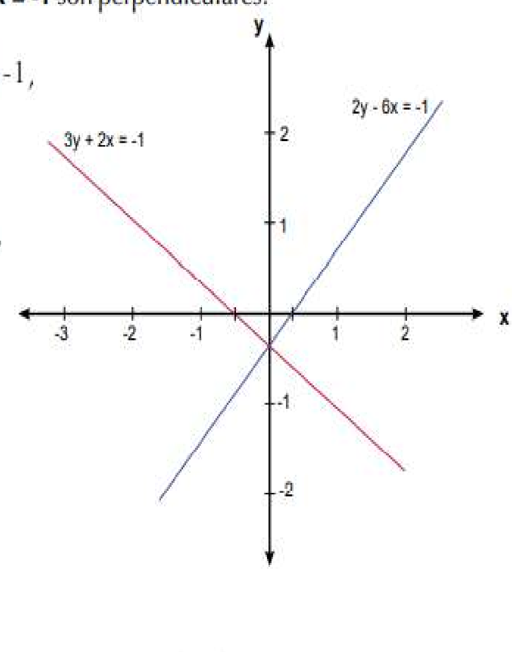
De la ecuación 3**y +2x = - 1** tenemos: $y = \frac{-2}{3}x - 1$,

luego su pendiente es $m_1 = \frac{-2}{3}$

De la ecuación **$2y - 3x = -1$** tenemos: $y = \frac{3}{2}x - 1$,

luego su pendiente es $m_2 = \frac{3}{2}$

Por lo tanto: $m_1 \cdot m_2 = \frac{-2}{3} x \frac{3}{2} = -1$



Concluimos que las rectas **$3y + 2x = -1$** y **$2y - 3x = -1$** son perpendiculares.

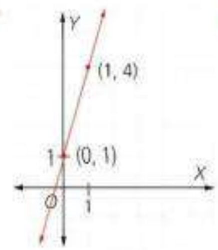
ACTIVIDAD 6:

1. Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos.
   a. $(1, -5)$ y $(-2, 1)$ b. $(2, 14)$ y $(-1, -7)$
   c. $(-2, -2)$ y $(0, 10)$ d. $(-3, 5)$ y $(-4, -1)$

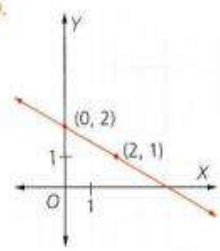
2. Indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $y = 7x - 33$ y cuáles no. Justifica en cada caso tu respuesta.
   a. $(5, -2)$ b. $(5, 2)$ c. $(2, 5)$ d. $(2, -5)$

3. Calcula la pendiente de cada recta. Luego, encuentra su ecuación considerando los puntos que pertenecen a ella.

a.



b.



4. Una empresa de turismo ha observado que cuando el precio de un viaje es de \$ 15 000 se venden 40 asientos, pero si el precio sube a \$ 18 000 las ventas bajan a 30 asientos.
   a. Encuentra la ecuación de la recta que representa la situación y dibuja su gráfica.
   b. Realiza la gráfica de la función.
   c. Determina el precio del pasaje si la venta sube a 56 asientos.

Números narcisistas

El número 153 tiene la propiedad de ser igual a la suma de los cubos de sus cifras, así:

$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$. Esta propiedad también la cumplen: 370, 371 y 497. Compruébalo.

Un ingeniero utiliza el concepto de pendiente para la construcción de las cubiertas (techo) de una vivienda y para esto tienen que determinar las características de la zona (si es muy lluvioso…) y clasificar las casas en tipo I, II y III.

- **SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO:**

Recordemos que una ecuación lineal o de primer grado es aquella cuyo **exponente de la variable es 1.**

Ejemplos:

- ✓ $3x + 5 = 8$
- ✓ $6 - 5a + 2a = 8 - 4a$
- ✓ $1 + 6y = 4y - (3 - 2y)$
- ✓ $5m - 5(2m + 1) = -3(4m + 5)$

Observa que las variables anteriores no tienen exponente, porque este es 1 y el uno no se escribe.

Pasos para la solución de ecuaciones lineales:

1. Resuelvo las operaciones que sean posibles.
2. Ubico en un solo lado de la ecuación las variables y en el otro lado los números, recuerda que esto se realiza respecto al igual. Para esto, es necesario utilizar las propiedades de la igualdad, en las operaciones de suma y resta.
3. Sumo o resto los términos semejantes.
4. Despejo la variable, utilizando las propiedades de la igualdad en las operaciones de multiplicación y división.
5. Multiplico o divido según la operación.

Solucionemos algunas ecuaciones lineales:

- ✓ $3x + 5 = 8$ ……pasemos los números para un lado de la ecuación.
  - $3x + 5 - 5 = 8 - 5$ ……eliminemos del lado izquierdo los números que estén sumando o restando.

  $3x = 3$……desarrollemos las operaciones.

  $\frac{3}{3}x = \frac{3}{3}$……eliminemos del lado izquierdo los números que estén multiplicando o dividiendo, para despejar la variable.

  $x = 1$……desarrollemos las operaciones.

- ✓ $6\boxed{-5a + 2a} = 8 - 4a$……resuelvo las operaciones posibles.

  $6 - 3a = 8 - 4a$

  $6\boxed{-3a + 4a} = 8\boxed{-4a + 4a}$……paso las variables para el lado izquierdo, usando las propiedades de la igualdad. (suma y resta)

  $6 + a = 8$……resuelvo las operaciones.

  $\boxed{6 - 6} + a = \boxed{8 - 6}$……paso los números para el lado derecho. (suma y resta)

  $a = 2$……resuelvo las operaciones, como no hay números multiplicando, ni dividiendo, el resultado es 2.

- $1 + 6y = 4y - (3 - 2y)$

  Ahora, desarrollemos la ecuación con los mismos pasos, pero simplifiquemos los procesos.

  $1 + 6y = 4y - 3 + 2y$……resuelvo las operaciones posibles, en este caso destruyo paréntesis y sumo términos semejantes.

  $1 + 6y = 6y - 3$

  $-6y + 6y = -3 - 1$……paso para el lado izquierdo las variables y para el lado derecho los números, utilizo las propiedades de la igualdad, para simplificar el proceso, utilizo las operaciones inversas inicialmente de la suma y resta.

$0 = -4$ ....resuelvo las operaciones, como la variable y desapareció y llegamos a una contradicción, decimos que la ecuación no tiene solución.

- $5m - 5(2m + 1) = -3(4m + 5)$.......aplicamos la propiedad distributiva.
  $5m - 10m - 5 = -12m - 15$.......sumamos los términos semejantes.
  $-5m - 5 = -12m - 15$.......pasamos al lado izquierdo las variables y al lado derecho los números.
  $12m - 5m = -15 + 5$............sumamos los términos semejantes.
  $7m = -10$ ....el 7 que está multiplicando lo pasamos a dividir con el 10.
  $m = \frac{-10}{7}$

Recuerda que los últimos procedimientos corresponden a una forma más sencilla de aplicar la propiedad de la igualdad.

Para una mejor compresión de lo anterior observa los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=9Ly9qasM8IM
https://www.youtube.com/watch?v=IHblqjW8RY8

EJERCICIO 1: Resuelve las siguientes ecuaciones de acuerdo a lo anterior:

a. $3x - 2 + 3 - 6x = 2 + 2x + 2$
b. $24m - 30m + 6 - 12m = 81 - 9x - 54$
c. $3y - 9 - 8 + 12x = 6 - 5x$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Al solucionar una ecuación encontramos los números que hacen verdadera la igualdad. Las ecuaciones anteriores eran sencillas de solucionar porque en todas vimos que sólo había una variable. En el caso donde hay una o más variables con exponente uno, necesitamos de un conjunto de ecuaciones para poder dar solución al sistema de ecuaciones.

En la siguiente ecuación $3m + 4n = 18$ tenemos dos incógnitas m y n, cuyos valores corresponden a *m = 2* y *n = 3,* porque al reemplazar $3(2) + 4(3) = 6 + 12 = 18$.

Existen ecuaciones que no son tan sencillas de solucionar como el caso de $16m + 3n = -2$, para esto necesitaremos de otra ecuación.

Para el caso de $2x + 4y - 3z = -2$ necesitamos tres ecuaciones, porque tenemos tres incógnitas x, y y z, es decir, que, según la cantidad de incógnitas en una ecuación, necesitaremos la misma cantidad de ecuaciones para poder encontrar la solución.

A ese conjunto de ecuaciones lo llamaremos **sistema de ecuaciones**, que para nuestro caso será 2x2 porque sólo estudiaremos las ecuaciones que tienen dos incógnitas de grado uno, es decir, las ecuaciones lineales.

Ej 1: El siguiente conjunto de ecuaciones corresponde a un sistema de ecuaciones 2x2, porque está formado por dos ecuaciones y dos variables *x* y *y*.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

La solución del sistema anterior es la pareja ordenada (2, 4), porque satisface las dos ecuaciones, observa:

$$2(2) - 4 = 4 - 4 = 0$$
$$3(2) + 2(4) = 6 + 8 = 14$$

Recuerda: en una pareja ordenada el primer número corresponde a x, el segundo número corresponde a y, para el caso anterior x=2 y y=4.

Solucionar un sistema de ecuaciones lineales consiste en hallar las soluciones que son comunes a todas las ecuaciones del sistema.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS 2X2:

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Para dar solución a un sistema de ecuaciones podemos utilizar cualquiera de los siguientes métodos:

1. **Método gráfico:**

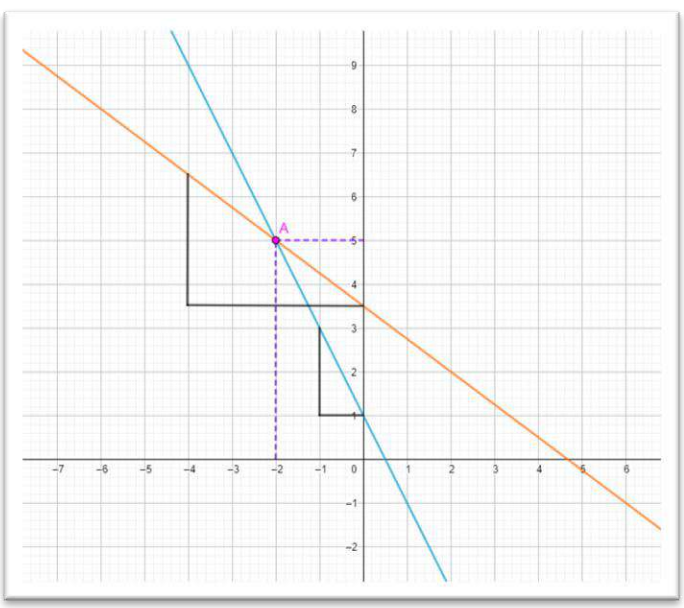
   El método consiste en representar gráficamente las rectas en el plano cartesiano y el punto de corte entre las dos rectas es la solución del sistema.

Recordemos, un sistema de ecuaciones puede tener una solución, infinitas soluciones o no tener solución, estos son los casos:

Ej 2: Solucionemos el siguiente sistema de ecuaciones, **con única solución:**

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$$

- Grafiquemos la primera ecuación: $2x + y = 1$
  1. Despejamos y: $y = -2x + 1$
  2. Ubico el intersecto con el eje y, 1
  3. Me muevo una unidad a la izquierda, porque la pendiente es negativa.
  4. Subo dos unidades, según me indica la pendiente.
  5. Grafico la recta azul.
- Grafiquemos la segunda ecuación: $3x + 4y = 14$
  1. Despejamos y: $y = \frac{-3}{4}x + \frac{14}{4}$
  2. Ubico el intersecto con el eje y, $\frac{14}{4} = 3{,}5$
  3. Me muevo cuatro unidades a la izquierda $\frac{-3}{4}$, porque la pendiente es negativa.
  4. Subo 3 unidades según me indica la pendiente $\frac{-3}{4}$.
  5. Grafico la recta naranja.



Observa que las rectas se intersectan en el punto A(-2, 5), *x = -2* y *y = 5* es la solución al sistema de ecuaciones, puesto que satisface ambas soluciones. Reemplacemos x y y en las ecuaciones iniciales, así:

$2x + y = 1$

$2(-2) + 5 = -4 + 5 = 1$

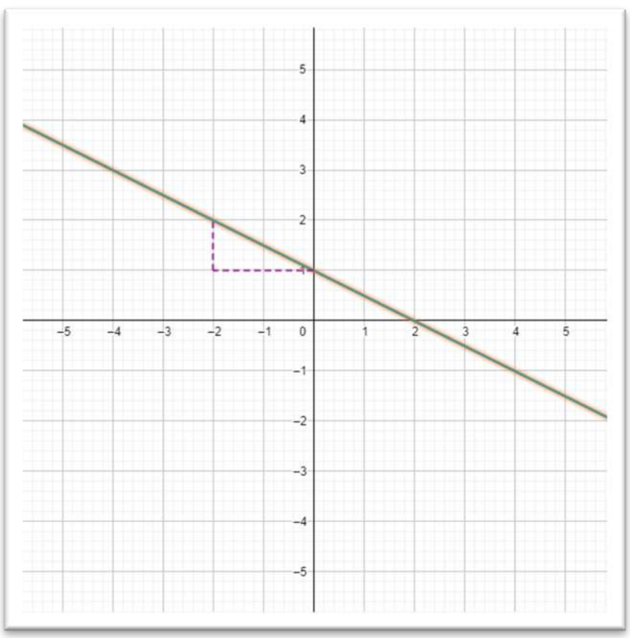
$3x + 4y = 14$

$3(-2) + 4(5) = -6 + 20 = 14$

Ej 3: Solucionemos el siguiente sistema de ecuaciones, **con infinitas soluciones:**

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

- Grafiquemos la primera ecuación: $x + 2y = 2$
  1. Despejamos y: $y = \frac{-x}{2} + \frac{2}{2}$ ➡ $y = \frac{-x}{2} + 1$
  2. Ubico el intersecto con el eje y, 1
  3. Me muevo dos unidades a la izquierda $\frac{-x}{2}$, porque la pendiente es negativa.
  4. Subo una unidad, según me indica la pendiente $\frac{-1x}{2}$.
  5. Grafico la recta azul.
- Grafiquemos la segunda ecuación: $2x + 4y = 4$
  1. Despejamos y: $y = \frac{-2}{4}x + \frac{4}{4}$ ➡ $y = \frac{-x}{2}x + 1$
  2. Observa que, al simplificar, obtengo la primera ecuación, al graficar ambas pendientes quedará una sobre otra.



Todos los puntos de la recta satisfacen el sistema de ecuaciones anteriores.

Ej 4: Solucionemos el siguiente sistema de ecuaciones, **el cual no tiene solución:**

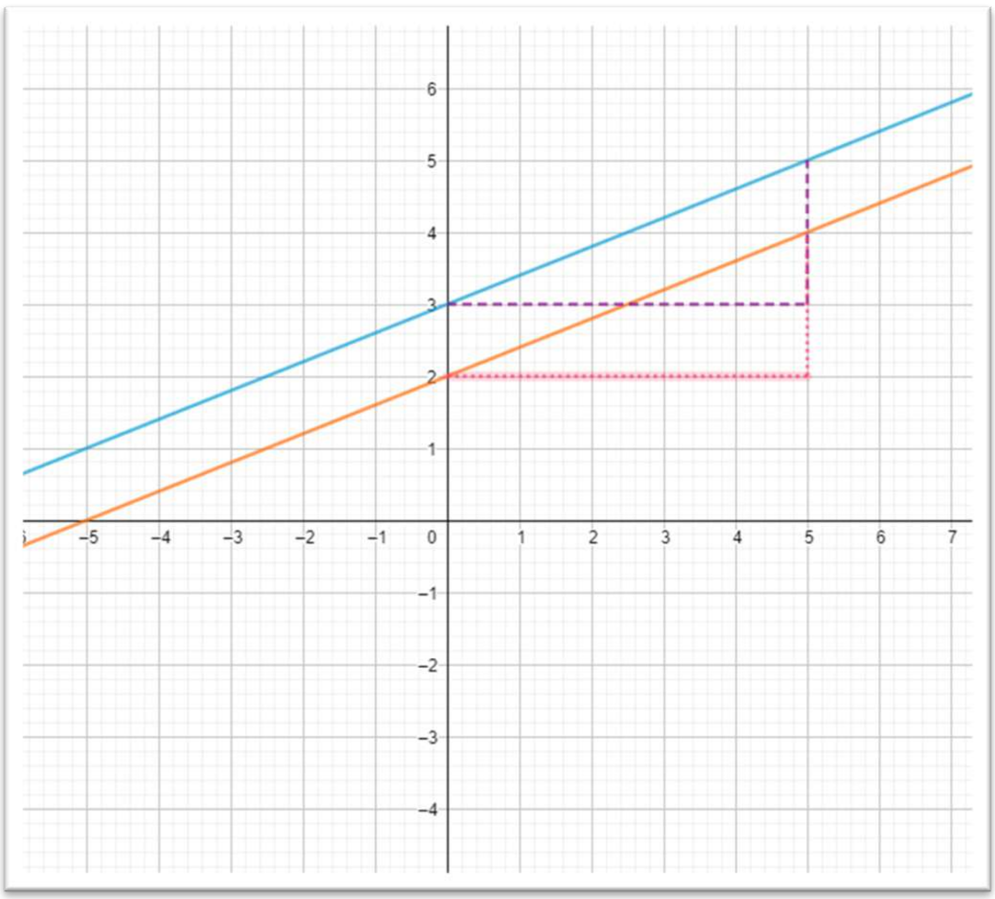
$$\begin{cases} -2x + 5y = 15 \\ -4x + 10y = 20 \end{cases}$$

- Grafiquemos la primera ecuación: $-2x + 5y = 15$
  1. Despejamos y: $y = \frac{2x}{5} + \frac{15}{5}$ ➡ $y = \frac{2x}{5} + 3$
  2. Ubico el intersecto con el eje y, 3
  3. Me muevo cinco unidades a la derecha $\frac{2x}{5}$, porque la pendiente es positiva.

4. Subo dos unidades, según me indica la pendiente $\frac{2x}{5}$.
5. Grafico la recta azul.

- Grafiquemos la segunda ecuación: $-4x + 10y = 20$

1. Despejamos y: $y = \frac{4}{10}x + \frac{20}{10}$ ➡ $y = \frac{2x}{5}x + 2$
2. Ubico el intersecto con el eje y, 2.
3. Me muevo cinco unidades a la derecha $\frac{2x}{5}$, porque la pendiente es positiva.
4. Subo dos unidades, según me indica la pendiente $\frac{2x}{5}$.
5. Grafico la recta naranja.



Como ambas rectas son paralelas y no coinciden en ningún punto, entonces, el sistema no tiene solución.

Conclusión: cuando las rectas se cortan en un punto decimos que el sistema tiene una única solución, cuando las rectas coinciden decimos que tiene infinitas soluciones y cuando las rectas son paralelas decimos que el sistema no tiene solución.

EJERCICIO 2: Resuelve en tu cuaderno, el punto 1 de la página 157, los literales a y c del libro Matemáticas. Vamos a aprender del grado 9°, el cual encontrarás en el siguiente link en formato PDF. https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-9-vamos-a-aprender.pdf

EJERCICIO 3: Resuelve en tu cuaderno, el punto 2 de la página 157, el literal b del libro Matemáticas. Vamos a aprender del grado 9°, el cual encontrarás en el siguiente link en formato PDF. https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-9-vamos-a-aprender.pdf

En los siguientes links podrás profundizar los conceptos anteriores, ten presente que el método que utilizan ambos profesores es la de crear la tabla de valores, que fue lo que vimos en las primeras clases de función lineal. Ambas soluciones, la tabla de valores y pendiente, intersecto con el eje y son válidas.

https://www.youtube.com/watch?v=PD45s3U9WA0

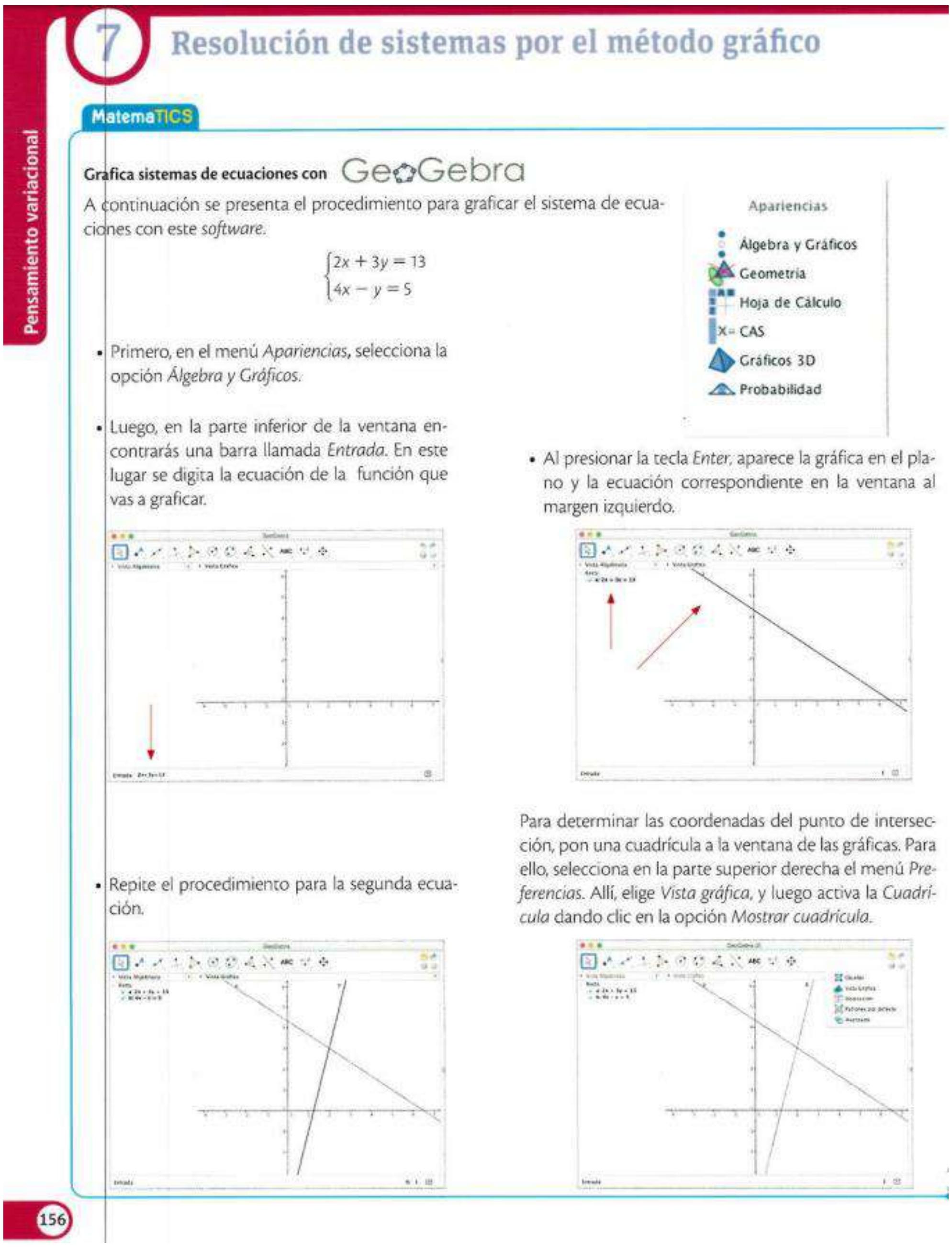
https://www.youtube.com/watch?v=eMug3FSoOZk

ACTIVIDAD 7:

Utiliza el software Geogebra, el cual encontrarás en el siguiente link https://www.geogebra.org/classic?lang=es. Sigue las instrucciones que encontrarás en el libro Matemáticas. Vamos a aprender del grado 9° en la página 156.

https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-9-vamos-a-aprender.pdf

Toma nota de la solución del sistema y reemplaza en las ecuaciones para verificar la solución.



Pensamiento variacional

7 Resolución de sistemas por el método gráfico

MatemaTICS

Grafica sistemas de ecuaciones con GeoGebra

A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones con este *software*.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

- Primero, en el menú *Apariencias*, selecciona la opción *Álgebra y Gráficos*.

Apariencias

Álgebra y Gráficos

Geometría

Hoja de Cálculo

CAS

Gráficos 3D

Probabilidad

- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada *Entrada*. En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.
- Al presionar la tecla *Enter*, aparece la gráfica en el plano y la ecuación correspondiente en la ventana al margen izquierdo.
- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.

Para determinar las coordenadas del punto de intersección, pon una cuadrícula a la ventana de las gráficas. Para ello, selecciona en la parte superior derecha el menú *Preferencias*. Allí, elige *Vista gráfica*, y luego activa la *Cuadrícula* dando clic en la opción *Mostrar cuadrícula*.

156

Recursos didácticos: ¿Qué usar?

1. **Videos.**

   ¿Cómo graficar fracciones? https://www.youtube.com/watch?v=3RGj3RbqkmQ

   ¿Cómo graficar decimales? https://www.youtube.com/watch?v=t5Bu_YUCrPk

   ¿Cómo se suman y restan las fracciones? https://www.youtube.com/watch?v=TbpR9zShGU0

   ¿Cómo se multiplican y dividen las fracciones y las raíces?
   https://www.youtube.com/watch?v=ygxurdxhfgi
   https://www.youtube.com/watch?v=dl3itenngoy

   ¿Cómo graficar una recta a partir de una tabla de valores?
   https://www.youtube.com/watch?v=AoZpzAoC1Qg

   ¿Cómo graficar una recta a partir de la pendiente?
   https://youtu.be/GBSmycLgTeU

   ¿Cómo se solucionan ecuaciones lineales?
   https://www.youtube.com/watch?v=9Ly9qasM8IM
   https://www.youtube.com/watch?v=IHblqjW8RY8

   ¿Cómo solucionar un sistema de ecuaciones 2x2 por el método gráfico?
   https://www.youtube.com/watch?v=PD45s3U9WA0
   https://www.youtube.com/watch?v=eMug3FSoOZk

2. **Libros en pdf.**
   https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-9-vamos-a-aprender.pdf
   http://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/plan_choco/mat_9_b3_p1_est_web.pdf
   mper_arch_17199_PLAN AREA MATEMATICAS 2015.pdf

3. **Software Geogebra.**
   https://www.geogebra.org/classic?lang=es

TEMPORALIZACIÓN:

1º y 2° semana:

- Números Reales.
- Actividad 1.

3º y 4º semana:

- Operaciones con números reales.
- Actividad 2.
- Potenciación.

5° semana:

- Actividad 3.
- Radicación.

6º semana:

- Racionalización.
- Actividad 4.

7º semana:

- Función lineal.
- Actividad 5.

6º y 7° semana:

- Pendiente de la recta.
- Ecuación de la recta.
- Actividad 6.

8º semana:

- Solución de ecuaciones lineales o de primer grado
- Sistemas de ecuaciones.
- Ejercicios.

9º semana:

- Método gráfico.
- Ejercicios.
- Actividad 7.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resolver problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Identificar y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

- Modelar situaciones de variación con funciones lineales.
- Identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano.
- Resolver sistemas de ecuaciones 2x2 por el método gráfico.

MAPA CONCEPTUAL: