

PROYECTO MATEMÁTICA

INTERACTIVIDAD - INVESTIGACIÓN

INEDINCO - GUARNE ANTIOQUIA

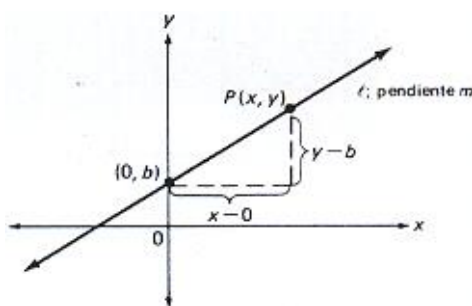
TALLER DE MATEMÁTICAS GRADO NOVENO

SEMANA DEL 22 AL 25 DE AGOSTO

Sandro David Melo S

Función lineal

A continuación se ilustra una recta que tiene la pendiente m y la ordenada al origen b . Para encontrar la ecuación de ℓ , empezamos considerando cualquier punto $P(x, y)$ sobre ℓ , diferente del punto $(0, b)$.



Como la pendiente m está dada por dos de sus puntos, sean cuales sean, podemos usar $(0, b)$ y (x, y) para escribir:

$$m = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x}$$

Si ambos lados de la igualdad se multiplican por x , obtenemos:

$$y - b = mx$$

o también:

$$y = mx + b \quad \leftarrow \text{Observe que también el punto } (0, b) \text{ satisface esta forma final.}$$

Esto conduce a la siguiente *forma de la ecuación de una recta con la ordenada al origen*.

Un punto (x, y) está sobre esta recta si y sólo si sus coordenadas satisfacen esta ecuación.

FORMA "PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN" DE LA ECUACION DE UNA RECTA

$$y = mx + b$$

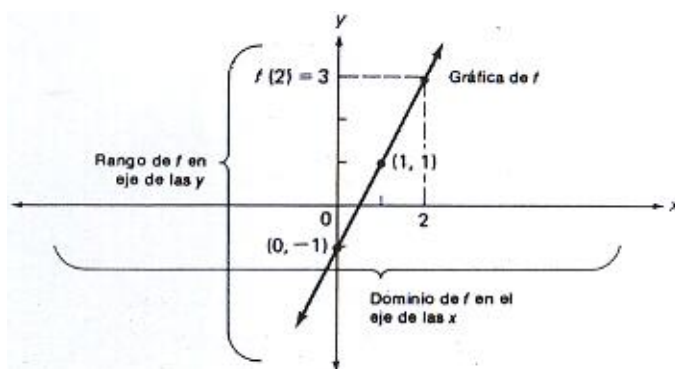
donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

Además, la ecuación $y = mx + b$ define una función; por lo tanto, podemos concebir $y = f(x) = mx + b$ como una función lineal cuyo dominio consiste en todos los números reales.

Tanto el dominio como el rango de f consisten en todos los números reales.

EJEMPLO 1 Elabore la gráfica de la función lineal f , definida por $y = f(x) = 2x - 1$, usando la pendiente y la ordenada al origen. Además, indique el dominio y el rango de f y exprese geoméricamente $f(2) = 3$; es decir, muestre el punto correspondiente a $f(2) = 3$.

Solución La ordenada al origen es -1. Localizamos $(0, -1)$ y usamos $m = 2 = 2/1$ para llegar a $(1, 1)$, otro punto de la recta.



EJEMPLO 2 Encuentre la ecuación de la recta con pendiente $2/3$, que pasa por el punto $(0, -5)$.

Solución Como $m = 2/3$ y $b = -5$, la forma "pendiente-ordenada al origen" $y = mx + b$ nos da:

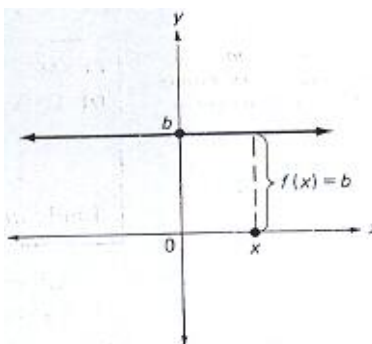
$$\begin{aligned} y &= 2/3x + (-5) \\ &= 2/3x - 5 \end{aligned}$$

Un caso especial de $y = f(x) = mx + b$ se obtiene cuando $m = 0$.
Entonces:

$$y = 0(x) + b \quad \text{o} \quad y = b$$

Esto significa que, para cada entrada x , la salida $f(x)$ siempre tiene el mismo valor: b .

Dominio: todos los reales
Rango: únicamente el valor b



¿Es posible que una recta vertical constituya la gráfica de una función en la que y dependa de x ? Explíquelo.

Como $f(x) = b$ es constante para todos los valores de x , nos referimos también a esta función lineal como una *función constante*. Esta gráfica es una recta horizontal.

EJEMPLO 3 Elabore la gráfica, después de escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y que es:

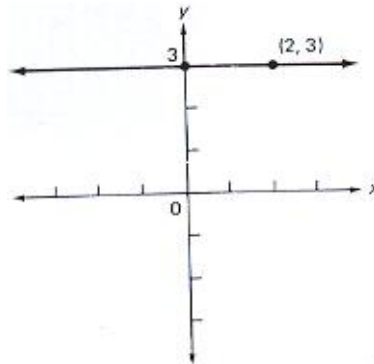
- a) Paralela al eje de las x
- b) Paralela al eje de las y

Solución

- a) La ordenada y al origen es 3 y la pendiente es 0. Por lo tanto, la ecuación es:

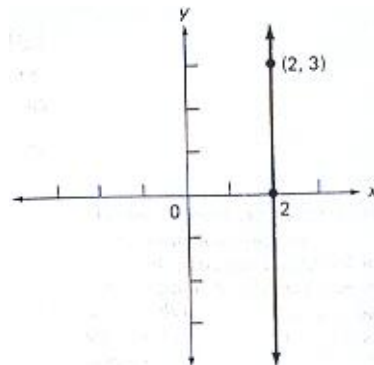
$$y = 0(x) + 3; \text{ o sea: } y = 3$$

En general, una recta horizontal que pasa por el punto (h, k) corresponde a la forma: $y = k$.

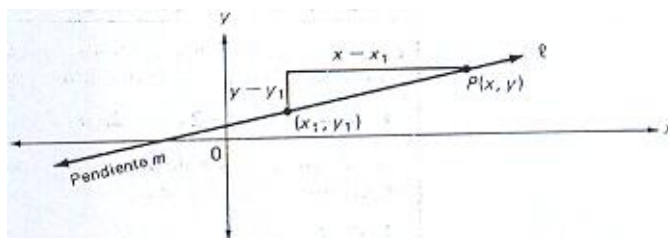


- b) La recta no tiene ordenada al origen. Además, la pendiente no está definida; es decir: no hay pendiente. En la figura, observamos que y puede ser cualquier valor, pero x siempre es 2. Por lo tanto, la ecuación de la recta es $x = 2$

En general, una recta vertical que pasa por el punto (h, k) corresponde a la forma: $x = h$.



Ahora, sea ℓ una recta con la pendiente m , que pasa por (x_1, y_1) . Deseamos determinar las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ que esté en la recta ℓ .



En la figura, podemos observar que $P(x, y)$ estará en la recta ℓ si y sólo si la razón $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ es igual a la pendiente m . Es decir: P está en ℓ si y sólo si

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $x - x_1$.

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Esto nos conduce a otra forma de ecuación de una línea recta.

Esta es la forma de la ecuación de una recta que se usa con más frecuencia en el cálculo. Un punto (x, y) está en una recta si y sólo si sus coordenadas satisfacen esta ecuación.

FORMA "PUNTO-PENDIENTE" DE LA ECUACION DE UNA RECTA

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la pendiente y $(x - x_1)$ es un punto de la recta.

EJEMPLO 4 Escriba la forma "punto-pendiente" de la ecuación de la recta ℓ , cuya pendiente es $m = 3$ y que pasa por el punto $(-1, 1)$. Verifique que también $(-2, -2)$ está en la recta.

Solución

Como $m = 3$, cualquier punto (x, y) de la recta ℓ satisface esta ecuación:

$$y - 1 = 3[x - (-1)]$$

$$y - 1 = 3(x + 1)$$

Sea $x = -2$

$$y - 1 = 3[-2 + 1] = -3$$

$$y = -2$$

ADVERTENCIA: Preste atención a los signos menos de las coordenadas, cuando los use en la forma "punto-pendiente" de la ecuación de la recta. Observe la sustitución de $x_1 = -1$ en este ejemplo.

Por lo tanto, $(-2, -2)$ está en la recta.

VERIFIQUE SU COMPRENSION

Escriba la forma pendiente-ordenada al origen de las ecuaciones de la recta con la pendiente y la ordenada al origen dadas.

1. $m = 2; b = -2$ 2. $m = -1/2; b = 0$ 3. $m = \sqrt{2}; b = 1$

Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto dado, con la pendiente m ,

en la forma punto-pendiente.

4. (2, 6); $m = -3$ 5. (-1, 4); $m = 1/2$ 6. (5, -2/3); $m = 1$
7. (0, 0); $m = -1/4$ 8. (-3, -5); $m = 0$ 9. (1, -1); $m = -1$

10. Si la hay, ¿cuál de las ecuaciones obtenidas aquí produce una función lineal? Señale su rango.

EJEMPLO 5 Escriba la forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de la recta que pasa por los puntos (6, -4) y (-3, 8).

Solución Primero, calculamos la pendiente.

$$m = \frac{-4 - 8}{6 - (-3)} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

Consulte el ejercicio 68 para ver la forma de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. Use esa forma para completar de otra manera este ejemplo.

Utilizamos cualquiera de los dos puntos para escribir la ecuación en la forma punto-pendiente, y luego la convertimos en la forma pendiente-ordenada al origen. Así, usando el punto (6, -4),

$$\begin{aligned}y - (-4) &= -4/3(x - 6) \\y + 4 &= -4/3 x + 8 \\y &= -4/3 x + 4\end{aligned}$$

Demuestre usted que la misma forma final se obtiene empleando el punto (-3, 8).

EJEMPLO 6 Escriba la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $5x - 2y = 2$ y que pasa por el punto (-2, -6).

Solución Primero encontramos la pendiente de la recta dada, escribiendo la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{aligned}5x - 2y &= 2 \\-2y &= -5x + 2 \\y &= \frac{5}{2}x - 1\end{aligned}$$

La pendiente es $5/2$.

La recta perpendicular tiene la pendiente $-\frac{1}{5/2} = -\frac{2}{5}$. Como esta recta pasa, además, por $P(-2, -6)$, la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta nos da:

$$\begin{aligned}y + 6 &= -\frac{2}{5}(x + 2) \\y &= -\frac{2}{5}x - \frac{34}{5}\end{aligned}$$

Una ecuación lineal como $-\frac{2}{3}x + 4$ se puede convertir a otras formas equivalentes. En particular, cuando esta ecuación se multiplica por 3 y todos los términos se pasan al mismo lado de la ecuación, obtenemos $2x + 3y - 12 = 0$. Este es un ejemplo de la *ecuación lineal general*.

Se dice que la ecuación lineal general $Ax + By + C = 0$ define *implícitamente* a y en función de x , si $B \neq 0$. En otras palabras, tenemos estas formas equivalentes:

ECUACION LINEAL GENERAL $Ax + By + C = 0$ Donde A, B y C son constantes y los números A y B no son 0 al mismo tiempo.
--

$$Ax + By + C = 0$$



Forma *implícita* de la función lineal

$$By = -Ax - C$$

¡Error! Marcador no definido.



Forma *explícita* de la función lineal; forma pendiente-ordenada al origen

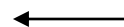
EJEMPLO 7 Encuentre la pendiente y la ordenada al origen de la recta dada por la ecuación $-6x + 2y - 5 = 0$.

Solución La convertimos en la forma explícita de la función lineal.

$$-6x + 2y - 5 = 0$$

$$2y = 6x + 5$$

$$y = 3x + \frac{5}{2}$$



Forma pendiente-ordenada al origen

Por consiguiente, $m = 3$ y $b = \frac{5}{2}$.

EJEMPLO 8 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(3, -1)$. Escriba la ecuación:

- (a) En la forma punto-pendiente
- (b) En la forma pendiente-ordenada al origen.
- (c) En la forma $Ax + By + C = 0$

Solución

(a) La pendiente m es $\frac{-1 - (-3)}{3 - 2} = 2$. Usamos esta pendiente y cualquier punto, como $(2, -3)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1): \quad y - (-3) = 2(x - 2) \quad \text{forma punto-pendiente}$$

$$y + 3 = 2(x - 2)$$

(b) Aprovechamos la solución de la parte (a) y la resolvemos para y

$$y + 3 = 2(x - 2)$$

$$y = mx + b: \quad y + 3 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 7 \quad \text{forma pendiente-ordenada al origen}$$

(c) Escribimos de nuevo la solución de la parte (b).

$$y = 2x - 7$$

$$Ax + By + C = 0: \quad -2x + y + 7 = 0 \quad \text{forma } Ax + By + C = 0$$

$$\text{o también: } 2x - y - 7 = 0$$

Observe usted que las tres formas constituyen diferentes maneras de expresar la misma ecuación para la recta dada, que pasa por los puntos (2, -3) y (3, -1). Demuestre que $x = 3$ e $y = -1$ satisfacen cada una de las formas obtenidas de la ecuación.

He aquí un resumen de las formas algebraicas de una recta, que hemos explorado:

<i>Forma pendiente-ordenada al origen</i>	<i>Forma punto-pendiente</i>	<i>Ecuación lineal general</i>
$y = mx + b$ Recta con pendiente m y ordenada al origen b	$y - y_1 = m(x - x_1)$ Recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1)	$Ax + By + C = 0$ Recta con pendiente $-\frac{A}{B}$ y ordenada al origen $-\frac{C}{B}$, si $B \neq 0$.

Para la ecuación lineal general, $Ax + By + C = 0$, observe usted lo siguiente:

Si $B = 0$ y $A \neq 0$, tenemos: $x = -\frac{C}{A}$, la ecuación de una recta vertical.

Si $A = 0$ y $B \neq 0$, tenemos: $y = -\frac{C}{B}$, la ecuación de una recta horizontal.

PRECAUCION: APRENDA A EVITAR ERRORES COMO ESTOS

MAL	BIEN
La pendiente de la recta que pasa por (2, 3) y (5, 7) es: $m = \frac{7-3}{2-5} = -\frac{4}{3}$	La pendiente de la recta que pasa por (2, 3) y (5, 7) es: $m = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$
La pendiente de la recta $2x - 3y = 7$ es: $-\frac{3}{2}$	La pendiente es $\frac{2}{3}$

La recta que pasa por $(-4, -3)$ con la pendiente 2 tiene esta ecuación: $y - 3 = 2(x - 4)$

La ecuación es: $y - (-3) = 2[x - (-4)]$;
o sea: $y + 3 = 2(x + 4)$

EJERCICIOS 3.3

Escriba la ecuación de la recta con la pendiente m y la ordenada al origen b , dadas.

1. $m = 2, b = 3$

2. $m = -2, b = 1$

3. $m = 1, b = 1$

4. $m = -1, b = 2$

5. $m = 0, b = 5$

6. $m = 0, b = -5$

7. $m = \frac{1}{2}, b = 3$

8. $m = -\frac{1}{2}, b = 2$

9. $m = \frac{1}{4}, b = -2$

Escriba en la forma punto-pendiente la ecuación de la recta que pasa por el punto dado con la pendiente indicada.

10. $(3, 4); m = 2$

11. $(2, 3); m = 1$

12. $(1, -2); m = 0$

13. $(-2, 3); m = 4$

14. $(-3, 5); m = -2$

15. $(-3, 5); m = 0$

16. $(8, 0); m = -\frac{2}{3}$

17. $(2, 1); m = \frac{1}{2}$

18. $(-6, -3); m = \frac{4}{3}$

19. $(0, 0); m = 5$

20. $(-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}); m = 1$

21. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}); m = 10$

22. (a) Encuentre la pendiente de la recta determinada por los puntos $A(-3, 5)$ y $B(1, 7)$, y escriba su ecuación en la forma punto-pendiente, usando las coordenadas de A .

(b) Haga lo mismo que en la parte (a) empleando las coordenadas de B .

(c) Verifique que las ecuaciones obtenidas en las partes (a) y (b) permiten obtener la misma forma pendiente-ordenada al origen.

Escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen; señale la pendiente y la ordenado al origen.

23. $3x + y = 4$

24. $2x - y = 5$

25. $6x - 3y = 1$

26. $4x + 2y = 10$

27. $3y - 5 = 0$

28. $x = \frac{3}{2}y + 3$

29. $4x - 3y - 7 = 0$

30. $5x - 2y + 10 = 0$

31. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 1$

Escriba la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados, en la forma $Ax + Bx + C = 0$

32. $(-1, 2), (2, -1)$

33. $(2, 3), (3, 2)$

34. $(1, 1), (-1, -1)$

35. $(3, 0), (0, -3)$

36. $(3, -4), (0, 0)$

37. $(-1, -13), (-8, 1)$

38. $(\frac{1}{2}, 7), (-4, -\frac{3}{2})$

39. $(10, 27), (12, 27)$

40. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$

41. Dos rectas, paralelas a los ejes coordenados, se cortan en el punto $(5, -7)$. ¿Cuáles son sus ecuaciones?

42. Escriba la ecuación de la recta que es paralela a $y = -3x - 6$ y tiene la ordenada al origen 6.

43. Escriba la ecuación de la recta, paralela a $2x + 3y = 6$, que pasa por el punto $(1, -1)$.

Escriba la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta dada y pasa por el punto indicado.

44. $y = -10x$; $(0, 0)$ **45.** $y = 3x - 1$; $(4, 7)$ **46.** $3x + 2y = 6$; $(6, 7)$ **47.** $y - 2x = 5$; $(-5, 1)$

48. Los vértices de un triángulo se localizan en $(-1, -1)$, $(1, 3)$ y $(4, 2)$. Escriba las ecuaciones de los lados de dicho triángulo.

49. En el ejercicio 48, escriba las ecuaciones de las tres alturas del triángulo.

50. Los vértices de un rectángulo se localizan en $(2, 2)$, $(6, 2)$, $(6, -3)$ y $(2, -3)$. ¿Qué relación existe entre las pendientes de las diagonales?

51. Los vértices de un cuadrado se localizan en $(2, 2)$, $(5, 2)$, $(5, -1)$ y $(2, -1)$. ¿Qué relación existe entre las pendientes de las diagonales?